შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

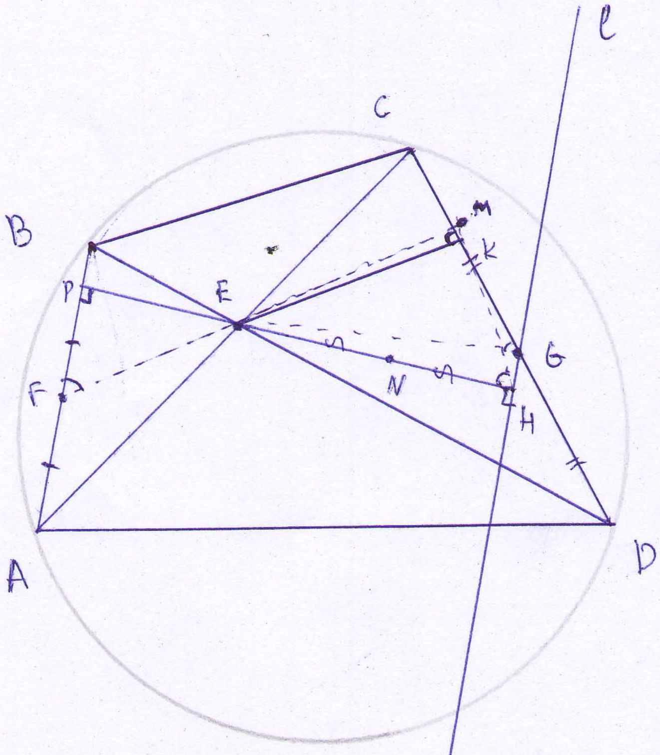
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 050

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



დავუშვათ გავავლეთ EH-სიმაღლე AB-ს შუამართობი და შუამართის წერტილი P. რადგანაც $l \parallel AB \Rightarrow \angle EPF = 90^\circ$

ვაჩვენოთ, რომ $\angle EMH = 90^\circ$.

$\begin{cases} \angle EAB = \angle EDC \\ \angle EBA = \angle ECD \end{cases} \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta EDC$ რადგანაც EF და EG მედიანები არის $\Rightarrow$

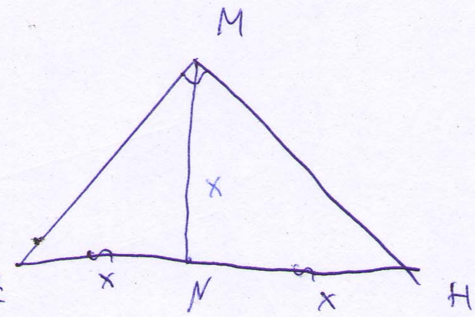
$\Rightarrow \Delta EFB \sim \Delta EGC \Rightarrow \angle EFB = \angle EGC$.

$\angle EKG + \angle EHG = 180^\circ \Rightarrow EKGH$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EHK = \angle EGK \Rightarrow \angle EHM = \angle EFP \Rightarrow FPMH$ ოთხკუთხედი ციკლურია, ა $\Rightarrow \angle FPE = \angle EMH = 90^\circ$.

მივიღეთ რომ $\angle EMH = 90^\circ$.

განვიხილოთ ΔEMH.



$EN = x \Rightarrow NH = x$, რადგან N EH-ის შუაწერტილია.

როგორც ვიცით მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია $\Rightarrow MN = x$, ხოლო $EH = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow EH = 2MN$.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 050

ამოცანა № 3

~~ცხადია, რომ $a \neq b$, წინააღმდეგ შემთხვევაში~~

$|a-b|$ დავშალოთ მარტივ მამრავლებად.

$|a-b| = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k}$, სადაც d_i-ები p_i-ს მაჩვენებლის ხარისხი.

დავუშვათ, რომ რომელიმე d არ იყოფა n-ზე. $\Rightarrow d = nk + r$, სადაც

$0 < r \leq n-1$

$a - b = a^n \cdot c - b^n \cdot d$

რადგან $a - b \,\vdots\, p^{nk+r} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p^{nk+r}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a-b = a^n \cdot c - b^n \cdot d \equiv a^n \cdot c - a^n \cdot d \equiv 0 \pmod{p^{nk+r}}$

მივიღეთ, რომ $a^n(c-d) \,\vdots\, p^{nk+r}$, რადგან $|c-d| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^n \,\vdots\, p^{nk+r}$-ზე $\Rightarrow a \,\vdots\, p$

~~a წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით $a = p^x \cdot y$,~~ სადაც

~~უ.ს.გ$(y;p) = 1 \Rightarrow a^n = p^{xn} \cdot y^n$~~ $\vdots\, p^{nk+r}$

~~y^n-იც~~ თანამამრავლი

~~რადგან y თანამამრავლი p-სთან, ამიტომ y^n-იც~~

~~იქნება p-სთან~~ $\Rightarrow$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ $b^n \,\vdots\, p^{nk+r} \Rightarrow b \,\vdots\, p$

a - წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით $a = p^x \cdot y$ სადაც უ.ს.გ$(p;y) = 1$.

b - წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით $b = p^z \cdot t$, უ.ს.გ$(p;t) = 1$, ვთქვათ $x \geq z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$a - b \,\vdots\, p^{x-y}$~~, $a - b \,\vdots\, p^z$ ~~$p^{z+1} \Rightarrow$~~

$\Rightarrow z = d.$

~~$a - b = a^n \cdot c - b^n \cdot d$~~ $= p^{nx} \cdot y^n \cdot c - p^{dn} \cdot t^n \cdot d$ $\not\vdots\, p^{dn+1}$-ზე $\Rightarrow$

~~მივიღეთ, რომ $\begin{cases} a = p^x \cdot y \\ b = p^d \cdot t \end{cases}$~~ ~~მივიღეთ, რომ $a - b \,\vdots\, dn$~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		21.04.2012/ მათ/ I/ 050

ამოცანა № 3 გვერდი № 2

~~=> , რომ ნებისმიერი მიიღება, რადგან |a-b|-ში გვხვდება n-ის ჯერადი ხარისხი, ამიტომ ამის შემდეგ, რომ |a-b| -ში სხვა ხარისხი => $\sqrt[n]{|a-b|}$ მთელი რიცხვია.~~

$a-b \vdots p^z$ ვაჩვენოთ, რომ $a-b \not\vdots p^{z+1}$, თუ $a-b \vdots p^{z+1}$ =>
ვთქვათ, რომ

=> $p^z(p^{x-z}\cdot y - t) \vdots p^{z+1}$ => $p^{x-z}\cdot y - t \vdots p$

თუ $x-z \geq 1$ => $t \vdots p$, რაც t ვიცით, p-სთან თანამარტივია, ე $x=z$ =>

=> $a = p^x\cdot y$, $b = p^x\cdot t$ და $y-t \vdots p$ => $y \equiv t \pmod p$

$a-b = p^{nx}\cdot y^n\cdot c - p^{nx}\cdot t^n\cdot d = p^{nx}(y^n\cdot c - t^n\cdot d) \vdots p^d$

~~$\equiv p^{nx}(y^n\cdot c - y^n\cdot d) = p^{nx}\cdot y^n(c-d) \vdots p^d$, რადგან $|c-d|=1$ =>~~

~~=> $p^{nx}\cdot y^n \vdots$~~

ხოლო d მეტისმეტი თუ $d=nx$, მაშინ $d \vdots n$-ზე და ამოცანა ამოხსნილია,
ვთქვათ d მეტისმეტი ამიტომ $y^n\cdot c - t^n\cdot d$ უნდა იყოფოდეს p-ზე, =>

=> $y^n c - y^n\cdot d \vdots p$ => $y^n(c-d) \vdots p$ რადგან $|c-d|=1$ =>

=> $y^n \vdots p$-ზე, რაც, ჩვენ y ვიცით p-სთან თანამარტივია =>

=> $a-b \vdots p^z \not\vdots p^{z+1}$ => $z=d$ => $\begin{cases} a = p^x\cdot y \\ b = p^d\cdot t \end{cases}$

$a-b = p^{nx}\cdot y^n\cdot c - p^{dn}\cdot t^n\cdot d$, ~~რადგან~~ => $a-b \vdots p^{dn}$-ზე,

რაც d იყო მეტისმეტი ხარისხი. => $n=0$; $n=1$.

ე $n=1$ => $a-b=c-d$ => $|a-b|=1$, და ამიტომ

რომ $\sqrt[n]{|a-b|}$ მთელი რიცხვია. თუ $n=1$ =>

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 050

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

$a-b = ac - bd$

ე $c = d+1 \Rightarrow a-b = a(d+1) - bd$

$a - b = ad + a - bd \Rightarrow b(d-1) = d\cdot a \Rightarrow b \,\vdots\, d \Rightarrow b = dx$

$dx(d-1) = da \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = x(d-1) \\ b = dx \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |a-b| = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a-b|} = 1$

ე $d = c+1 \Rightarrow a-b = ac - b(c+1)$

$a - b = ac - bc - b$

$a(c-1) = bc \Rightarrow a \,\vdots\, c \Rightarrow a = cx \Rightarrow$

$\Rightarrow cx(c-1) = bc \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = x(c-1) \\ a = cx \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt[n]{|a-b|} = 1.$

რ.დ.გ.